DS de Résistance des Matériaux
Master 1 - FS2
Novembre 2010

Aucun document autorisé - Calculatrice autorisée
Nul autre appareil électronique autorisé

Le soin apporté à la copie et à la rédaction (présentation, orthographe, grammaire...) sera pris en compte. (**2pts**)

Du fait du nombre de questions permettant de vous orienter dans vos réflexions, l'examen est noté sur 30pts qui seront ramenés par homothétie à 20pts.

I Exercice de linéarisation

I.1 Contexte

Lorsqu'une dalle repose sur ses 4 côtés (voir TD de Technologie du Bâtiment), la répartition des charges sur la poutre ou le mur supportant la dalle n'est pas linéaire, mais peut-être triangulaire ou trapézpïdale suivant le côté considéré. Or l'ingénieur n'aime pas ces cas de charges compliqués, qu'il a tendance à linéariser suivant un critère. C'est le travail qui vous est demandé ici.

I.2 Enoncé

I.2.1 Géométrie

Soit une dalle de 6mx12m, reposant sur ses 4 côtés. La poutre de 12m, que nous considérerons comme isostatique, doit alors supporter une charge trapézoïdale d'amplitude maximale p, comme indiqué dans la figure 1

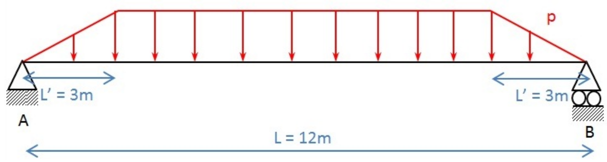


FIGURE 1: Charge trapézoïdale sur poutre isostatique

I.2.2 Travail demandé

Petite question de logique

Sans faire le moindre calcul, justifiez le point où le moment fléchissant sera maximal (**2pts**).

Petite question de cours

D'après le cours, soit une poutre isostatique sur 2 appuis, de longueur L, soumise à une charge uniformément répartie p'. Quelle est la valeur en fonction de p' et L du moment maximum ? (**1pt**)

Linéarisation

Déterminez en fonction de L, L' et p la valeur du moment maximum dans le cas d'un chargement trapézoïdal, comme indiqué dans la figure 1. N'hésitez pas à décomposer les détails de vos calculs (**4pts**).
Déduisez-en, en fonction de p, L et L', la charge uniformément répartie équivalente p' qui induirait le même moment maximal (**2pts**).
Que vaudrait p' pour une charge p de 7.5kN/m, L = 12m et L' = 3m ? (**1pt**)

II Problème

II.1 Contexte

Soit le schéma mécanique suivant, très répandu dans la construction de Génie Civil. Expliquez pourquoi, en l'état de vos connaissances de RDM1, vous n'êtes pas en mesure

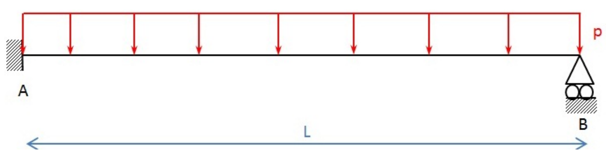


FIGURE 2: Géométrie du problème

de résoudre ce problème (**2pts**).
Et pourtant, vous savez le résoudre en mobilisant l'ensemble des connaissances acquises au cours de ces 5 semaines. L'objectif de cet exercice est donc de résoudre ce problème, en déterminant, en particulier, la réaction d'appui en B.

II.2 Résolution du problème

II.2.1 Décomposition du problème

Le problème décrit dans la figure 2 peut être schématisé comme la juxtaposition de deux exercices élémentaires, que vous savez résoudre et que vous avez résolus dans les petits exercices de TDs. Quelles sont les hypothèses de la RDM qui nous permettent d'utiliser

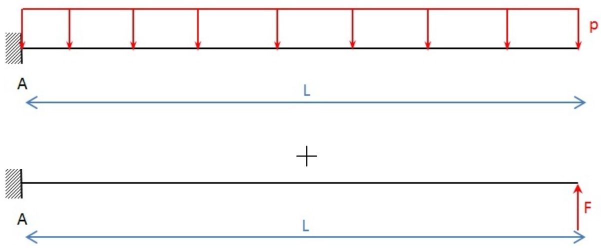


FIGURE 3: Décomposition du problème

le principe de superposition (**2pts**) ?
Pour que les problèmes représentés par les figures 2 et 3 soient équivalents, quelles sont les relations supplémentaires qui faut ajouter (**2pts**) ?

II.2.2 Traitement des 2 cas de la décomposition

Pour chacun des deux cas de la figure 3, déterminez :
– l'équation du moment
– la flèche en B
en fonction de p, F et L (**6pts**).
Déduisez en, en fonction de p, F et L, le flèche en B quand les deux cas de charge sont assemblés (**2pts**).

II.2.3 Résolution finale

A partir des constatations demandées dans le paragraphe II.2.1, déduisez-en, en fonction de p et L la réaction en B (**2pts**).
Tracez le diagramme des moments correspondant au cas de notre problème résolu (**2pts**).

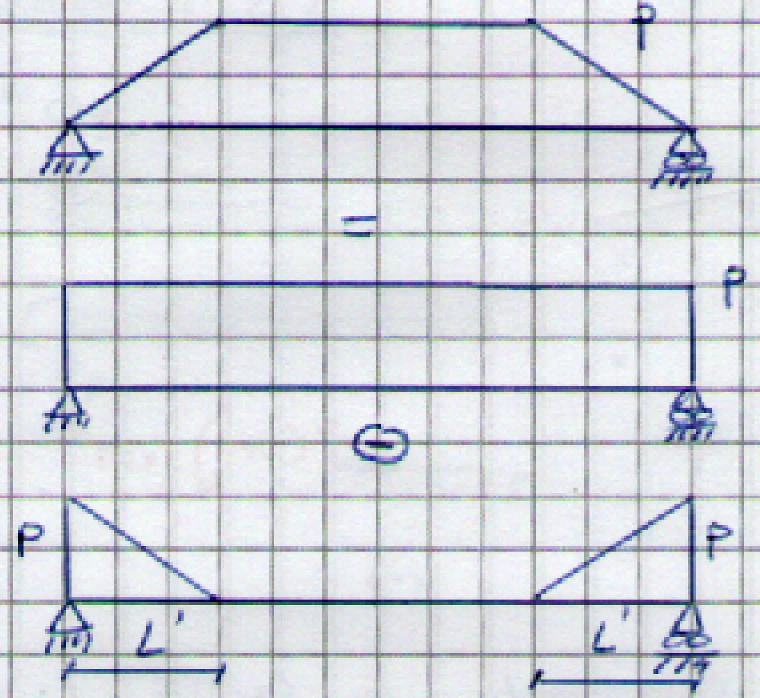
Qu'entraine l'ajout d'un appui supplémentaire en B par rapport à l'absence d'appui (console simple) (**2pts**) ?

Question I 2. 2

Du fait de la symétrie du système, aussi bien géométrique que mécanique, l'effort tranchant sera nul en $x = \frac{L}{2}$. Par conséquent, le moment fléchissant sera maximum en $x = \frac{L}{2}$

Une poutre de longueur L appuyée sur 2 appuis et soumise à une charge uniformément répartie p' a un moment maximum en $x = \frac{L}{2}$ égal à :

$$M_{max} = p' \frac{L^2}{8}$$

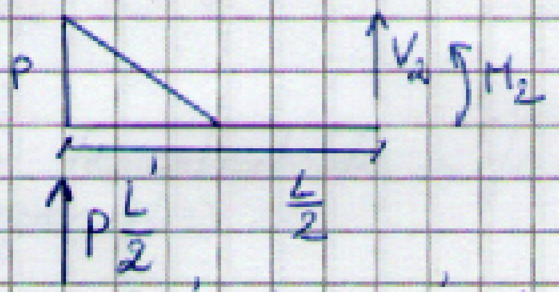


$$M_{max} = M_1 - M_2$$

$$M_{max} = M_1 = p\frac{L^2}{8}$$

$$M_{max} = M_2$$

Déterminons M_2 en $x = \frac{L}{2}$



$$M_2 = p\frac{L'}{2} * \frac{L}{2} - p\frac{L'}{2}\left(\frac{L}{2} - \frac{L'}{3}\right) = p\frac{L'^3}{6}$$

$$\text{d'où} \quad M_{max} = M_1 - M_2 = p\frac{L^2}{8} - p\frac{L'^2}{6}$$

Ainsi si on cherche p' tel que les moments dans le cas d'une charge linéaire égalent les moments dans le cas d'une charge trapézoïdale nous avons :

$$p'\frac{L^2}{8} = p\frac{L^2}{8} - p\frac{L'^2}{6}$$

$$p' = p\left(1 - \frac{4}{3}\frac{L'^2}{L^2}\right)$$

Dans le cas de $L' = 3$ m, $L = 12$ m nous avons $\frac{L'}{L} = \frac{1}{4}$ donc $p' = \frac{11}{12}p$ -

Avec $p = 7{,}5$ kN/m , $p' = 6{,}875$ kN/m

Question II 2 1

Le principe de superposition des cas de charges peut être utilisé car nous supposons un comportement élastique linéaire des matériaux. Ainsi

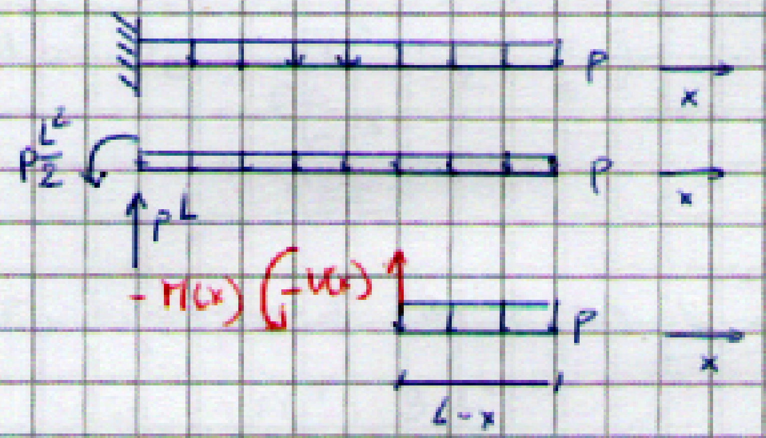
$$F_1 \longrightarrow d_1$$
$$F_2 \longrightarrow d_2$$
$$F_1 + F_2 \longrightarrow d_1 + d_2$$

Pour que les problèmes des figures 2 et 3 soient équivalents, il faut que :

$$F = R_{By}$$
et $v_B = 0$ (Appui simple)

Question II. 2 2

1er cas:



$-V(x) - p(L-x) = 0$ donc $V(x) = -p(L-x)$

$-M(x) - \frac{p}{2}(L-x)^2 = 0$ donc $M(x) = -p\frac{(L-x)^2}{2}$

$$M(x) = -\frac{p}{2}\left(L^2 - 2Lx + x^2\right)$$

Pour le calcul de la flèche en B nous devons doublement intégrer $M(x)$:

$$EI\, v''(x) = M(x)$$
$$EI\, v(x) = -p/2\left[\frac{L^2x^2}{2} - \frac{2Lx^3}{6} + \frac{x^4}{12} + Ax + B\right]$$

en A nous avons un encastrement donc $v(0) = 0$
$v'(0) = 0$

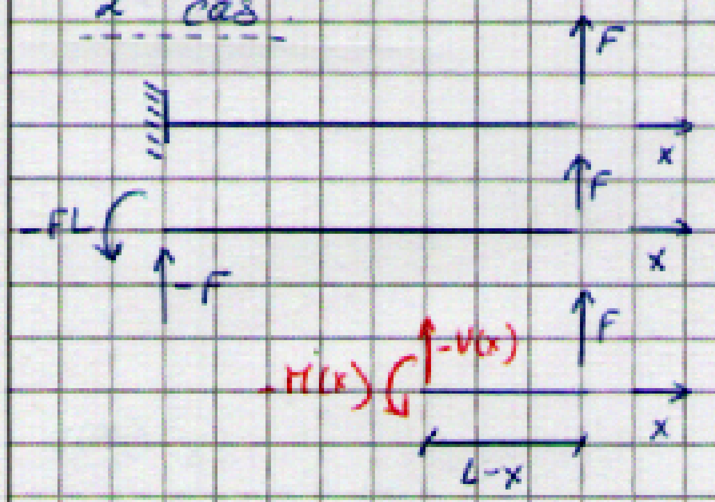
d'où $A = B = 0$

en $x = L$, $v_B = -\frac{p}{2EI}\left[\frac{L^4}{2} - \frac{L^4}{3} + \frac{L^4}{12}\right]$

$$= -\frac{pL^4}{24}/EI\,\left[6 - 4 + 1\right]$$

$$= -\frac{3pL^4}{24EI} = -p\frac{L^4}{8EI}$$

2nd cas



$-V(x) + F = 0$ donc $V(x) = F$

$-M(x) + F(L-x) = 0$ donc $M(x) = F(L-x)$

En double intégrant $M(x)$ on obtient =

$$EI\,v''(x) = M(x)$$

$$EI\,v(x) = F\left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} + Ax + B\right)$$ avec $A = B = 0$ (encastrement en $x = 0$)

d'où $$v_B = \frac{FL^3}{EI}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{FL^3}{3EI}$$

En superposant les 2 cas de charge nous obtenons ainsi =

$$v_B = \frac{FL^3}{3EI} - \frac{3pL^4}{24EI}$$

Question II 2 3.

En posant $F = R_{By}$ et $v_B = 0$ nous obtenons =

$$R_{By}\,\frac{L^{\cancel{3}}}{\cancel{3EI}} = 3p\,\frac{L^{\cancel{4}}}{\underset{8}{\cancel{24}}\,\cancel{EI}}$$

$$\boxed{R_{By} = p\frac{3L}{8}}$$

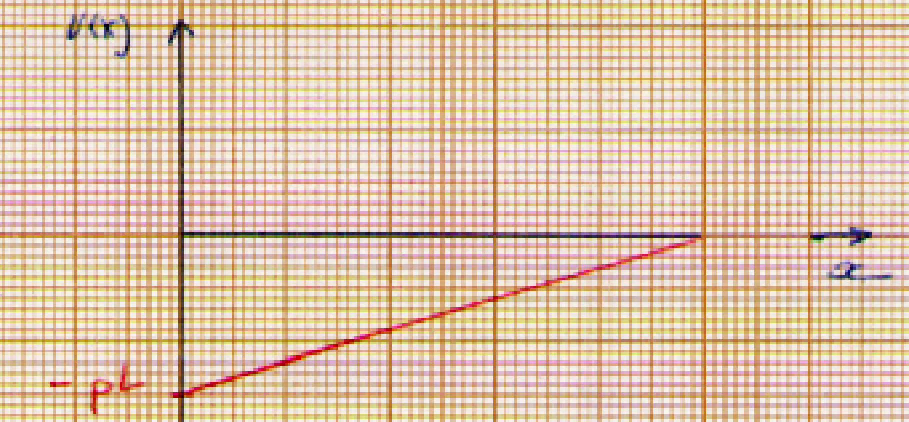
L'ajout d'un appui en B permet de diminuer l'effort tranchant dans la structure. Le moment à l'encastrement diminue aussi mais apparait un moment positif.
Ainsi la fibre supérieure de la section sera d'abord tendue puis comprimée.

Question II. 1

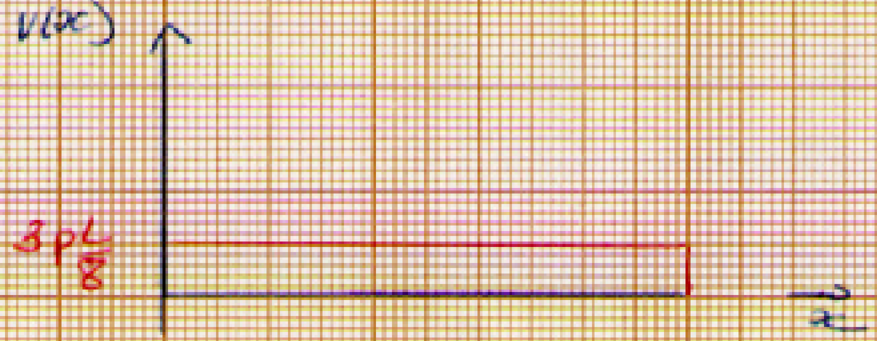
Nous avons 4 inconnues de réaction (3 en A et 1 en B) et d'après le PFS 3 équations. Il nous en manque donc 1 pour résoudre ce problème hyperstatique de degré 1

Diagramme de l'effort tranchant

1er cas :



2nd cas :



Superposition des 2 cas :

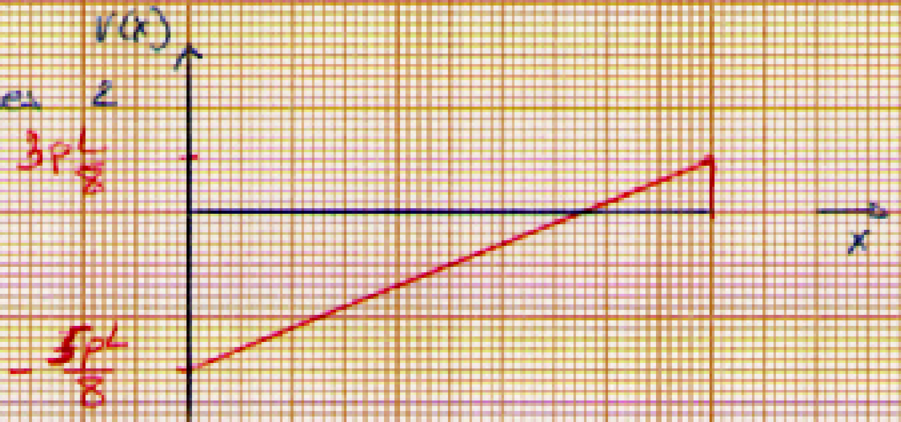
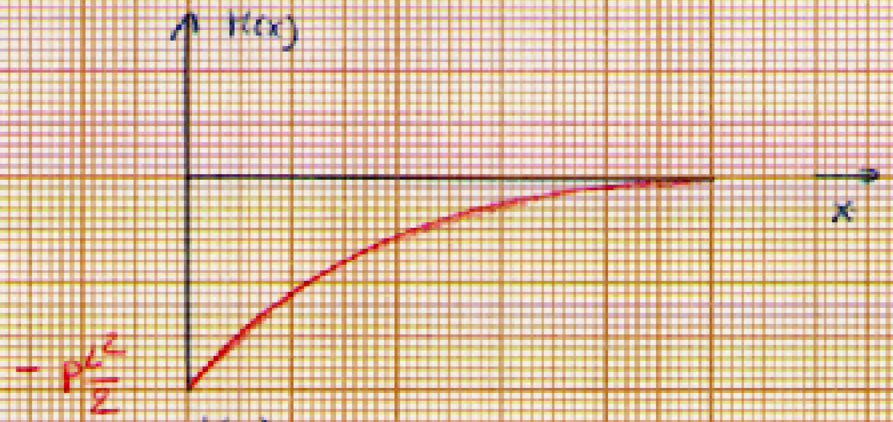
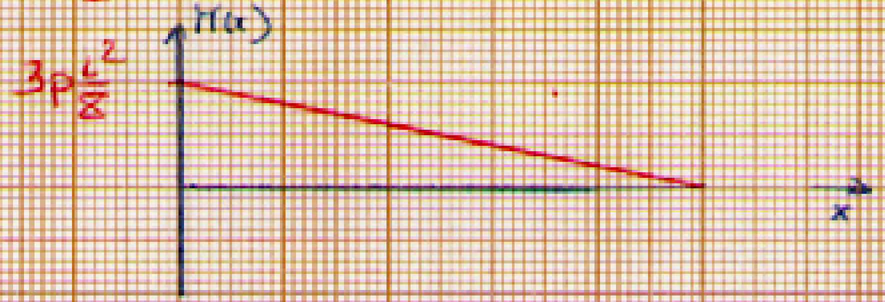


Diagramme des Moments fléchissants

1er cas



2nd cas :



Superposition des 2 cas